ISSN 1811-1807

ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік
университеті

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКАЛЫҚ СЕРИЯ

1'2013

ПМУ ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК ПГУ

УДК 539.3:534.2

Н. А. Испулов, А. К. Сейтханова

О МАТРИЧНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ЗАДАЧ ОТРАЖЕНИЯ – ПРЕЛОМЛЕНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН

Актуальность исследования закономерностей волновых процессов в упругих средах с термомеханическим эффектом связана с необходимостью решения теоретических и прикладных задач геофизики, сейсмологии, механики композитных материалов и т.д. Связанные уравнения движения и уравнения

теплопроводности отличаются сложностью и обилием физико-механических параметров. В связи с этим интенсивно развивается раздел механики деформируемого твердого тела, - термоупругость. В рамках этого направления, опираясь на использование определенных физико-механических свойств анизотропных средах, изучаются связанные тепловые и механические поля.

В данной статье приведена матричная формулировка задач отражения – преломления термоупругих волн на границах раздела различных сред.

Термоупругость описывает широкий круг явлений, являясь обобщением теорий упругости и теплопроводности. Принципиально важным является связанность полей деформации и температуры.

Пусть границей раздела двух однородных анизотропных полупространств является плоскость $z=0$. Прямые и обратные волны в этих средах задаются матрицантами прямых (T^+) и обратных (T^-) волн. Матрицанты первой среды обозначим через T_1^+ и T_1^-, а матрицант прямых волн второй среды через T_2^+. Матричная постановка и решение данной задачи сводится к следующему.

Падающие, отраженные и преломленные волны задаются в виде [1,2]:

$$\bar{w}_{пад} = T_1^+ \bar{w}_0 \quad (1)$$

$$\bar{w}_{отр} = T_1^- \bar{w}_r \quad (2)$$

$$\bar{w}_{пр} = T_2^+ \bar{w}_t \quad (3)$$

где вектора $\bar{w}_{пад}$, $\bar{w}_{отр}$, $\bar{w}_{пр}$ – содержат смещения точек среды u_z, u_x, u_y компоненты тензора напряжений σ_{zz}, σ_{xz}, σ_{yz} и компоненты теплового поля θ, q_z; T_1^+, T_1^- и T_2^+ определяются через соответствующие матрицы коэффициентов, т. е. содержат физико-механические параметры сред, частоту, и, x и y компоненты волновых векторов; $\bar{w}_0$ – вектор определяющий амплитуды падающих волн; $\bar{w}_r$ – вектор определяющий амплитуды отраженных волн; $\bar{w}_t$ – вектор определяющий амплитуды преломленных волн.

На границе должны выполняться условия:

$$\vec{w}_{пад}(0) = T_1^{+}(0)\vec{w}_0 = \vec{w}_0 \qquad (4)$$

$$\vec{w}_{отр}(0) = T_1^{-}(0)\vec{w}_r = \vec{w}_r \qquad (5)$$

$$\vec{w}_{пр}(0) = T_2^{+}(0)\vec{w}_t = \vec{w}_t \qquad (6)$$

Из (4)-(6) становиться ясным физический смысл векторов $\vec{w}_0$, $\vec{w}_r$, $\vec{w}_t$. Это вектора определяющие смещения точек среды (u_z, u_x, u_y), компоненты тензора напряжений (σ_{zz}, σ_{xz}, σ_{yz}), а также компоненты теплового поля (θ, q_z) на границе раздела сред. Условия (4)-(6) также связывают между собой значения на границе раздела смещения u_z и компоненту напряжения σ_{zz}, смещения u_x и компоненту напряжения σ_{xz}, смещения u_y и компоненту напряжения σ_{yz}, а также θ и q_z.

Для решения задачи отражения волн необходимо записать граничные условия. Так как в векторы столбцы входят смещения, нормальные к границе компоненты напряжения и касательные к границе составляющие теплового поля, то первое условие (4) запишется следующим естественным образом:

$$\vec{w}_0 + \vec{w}_r = \vec{w}_t \qquad (7)$$

Помимо этого условия ставится матричное условие, которое является следствием непрерывности решений:

$$T_1^{+}(0)\vec{w}_0 + T_1^{-}(0)\vec{w}_r = T_2^{+}(0)\vec{w}_t \qquad (8)$$

Решая совместно (7) и (8) для векторов $\vec{w}_r$ и $\vec{w}_t$ получим:

$$\vec{w}_r = (T_2^{+}(0) - T_1^{-}(0))^{-1}(T_1^{+}(0) - T_2^{+}(0))\vec{w}_0 \qquad (9)$$

$$\vec{w}_t = \left[E + (T_2^{+}(0) - T_1^{-}(0))^{-1}(T_1^{+}(0) - T_2^{+}(0))\right]\vec{w}_0 \qquad (10)$$

Введем обозначение

$$G = (T_2^{+}(0) - T_1^{-}(0))^{-1}(T_1^{+}(0) - T_2^{+}(0)) \qquad (11)$$

Тогда (9) и (10) можно переписать

$$\vec{w}_r = G\vec{w}_0 \qquad (12)$$

$$\vec{w}_t = \left[E + G\right]\vec{w}_0 \qquad (13)$$

Таким образом, из (2)-(3), (9)-(10) поля отраженных и преломленных волн запишутся в виде:

$$\bar{w}_{отр} = T_1^{-} G \bar{w}_0 \tag{14}$$

$$\bar{w}_{пр} = T_2^{+} (E + G) \bar{w}_0 \tag{15}$$

Выражения (14) и (15) являются решениями поставленной задачи. Из выражения (11) видно, что матрица G определяется матрицантами прямых и обратных волн при z=0.

Матрицанты прямых и обратных волн при z=0 равны:

$$T^{\pm}(0) = \frac{1}{2}(E \pm i\alpha R) \tag{16}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{k\kappa(k+\kappa)} \tag{17}$$

$$R = \langle B\rangle^{3} + (\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^{2} - \Delta^{2}})\langle B\rangle \tag{18}$$

Связанные уравнения термоупругости отличаются обилием упругих и термомеханических параметров. В связи с этим, в настоящее время, матричные методы являются наиболее конструктивными и эффективными.

В рамках метода матрицанта усредненный матрицант, описывающий распространение связанных гармонических термоупругих волн в анизотропных средах с термомеханическим эффектом имеет вид [3]:

$$T_{иср}^{\pm} = \left(\pi + \frac{1}{2}E\right)\left(E\cos kz \pm \frac{B}{k}\sin kz\right) - \left(\pi - \frac{1}{2}E\right)\left(E\cos\chi z \pm \frac{B}{\chi}\sin\chi z\right) \tag{19}$$

$$\frac{d\bar{W}}{dz} = B\bar{W} \qquad \bar{W} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, U_y, \sigma_{yz}, \theta, q_z)$$

Матрицы π, P определяются формулами:

$$\pi = \frac{P - \tilde{P}_2 E}{\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2} - \frac{1}{2}E \quad ; \qquad P = E + \frac{B_0^2 h^2}{2} \tag{20}$$

W - вектор, содержащий компоненты упругих и тепловых полей,

θ - приращение температуры, q_z - поток тепловой энергии.

$\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ являются корнями характеристического уравнения следующих из условия [4]:

$$\det(P-\lambda E)=0$$

Значения волновых чисел k и χ определяются из разложения соответствующих уравнений дисперсии термоупругих волн. В данном случае они имеют вид:

$$1-\frac{k^2h^2}{2}=\widetilde{P}_1; \qquad 1-\frac{\chi^2h^2}{2}=\widetilde{P}_2 \tag{21}$$

В $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$ в соответствии с (20) сохранены члены вплоть до ω^2.

Рассмотрим одномерное распространение термоупругих волн в анизотропной среде тетрагональной сингонии классов 4, $\bar{4}$, 4/m с матрицей коэффициентов B в виде:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

где $b_{12}=\frac{1}{c_{33}}$, $\qquad b_{17}=\frac{(2\beta_{13}+\beta_{33})}{c_{33}}$, $\qquad b_{21}=-\omega^2\rho$,

$b_{87}=-i\omega\left(\frac{\beta_{33}^2}{c_{11}}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\right)$, $\qquad b_{78}=-\frac{1}{\lambda_{33}}$.

Здесь c_{11}, c_{33} – упругие модули, ρ – плотность среды, λ_{33} – коэффициент теплопроводности, c_ε – теплопроводность при постоянной деформации, β_{13}, β_{33} – термомеханические коэффициенты.

С учетом затухания термоупругих волн, волновые числа k и χ могут быть представлены:

$k=k_0-ik_1$; $\qquad \chi=\chi_0-i\chi_1$; $\qquad z\rightarrow+\infty$

k_1, χ_1 - коэффициенты затухания упругих и тепловых волн.

Для волн распространяющихся вдоль положительной оси Z из (19) получен матрицант:

$$T_0^+ = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{2}E\right)\left(E - \frac{B_0}{ik}\right)e^{-ikz} - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}E\right)\left(E - \frac{B_0}{i\chi}\right)e^{-i\chi z} \qquad (23)$$

Обратные волны (распространения в область $z<0$; $z\to-\infty$) описываются матрицантом имеющим аналогичное представление:

$$T_0^- = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{2}E\right)\left(E + \frac{B_0}{ik}\right)e^{-ikz} - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}E\right)\left(E + \frac{B_0}{i\chi}\right)e^{-i\chi z} \qquad (24)$$

Граничные условия. Рассмотрим контакт двух термоупругих полупространств. При z=0 матриканты (23) и (24) могут быть представлены в виде:

$$T_0^{\pm} = \frac{1}{2}E \mp R; \qquad (25)$$

где

$$R = \frac{1}{2i}\left(\frac{k-\chi}{k\chi}\right)\pi B - \frac{1}{4i}\left(\frac{k+\chi}{k\chi}\right)B$$

Пусть $\vec{W}_0$ - поле падающих волн, $\vec{W}_R$ - отраженных и $\vec{W}_t$ - преломленных волн. Тогда:

$$T_0^+\vec{W}_0 + T_0^-\vec{W}_R = T_t\vec{W}_t, \text{ при } z=0 \qquad (26)$$

или

$$\left(\frac{1}{2}E - R_0\right)\vec{W}_0 + \left(\frac{1}{2}E + R_0\right)\vec{W}_R = \left(\frac{1}{2}E - R_t\right)\vec{W}_t \qquad (27)$$

Учитывая непрерывность полей на контакте сред (7), получим:

$$R_0\vec{W}_0 - R_0\vec{W}_R = R_t\vec{W}_t \qquad (28)$$

С учетом (27) выражение (28) есть искомое граничное условие для векторов $\vec{W}_0, \vec{W}_R, \vec{W}_t$ в матричной форме.

В (7) и (28) неизвестны вектора $\vec{W}_R$ и $\vec{W}_t$. Подстановка (7) в (28) дает уравнение:

$$(R_0 + R_t)\vec{W}_R = (R_0 - R_t)\vec{W}_0 \qquad (29)$$

откуда следует формула для поля отраженных волн $\vec{W}_R$:

$$\vec{W}_R = (R_0 + R_t)^{-1}(R_0 - R_t)\vec{W}_0 \qquad (30)$$

Поле $\vec{W}_t$ определяется формулой (7).

Матрица R в (25) может быть представлена в форме:

$$R = \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)}\left[B_0^2 h^2 - (p_{10} + p_{20})E + \Delta E\right]B \qquad (31)$$

где

$$p_{10} = b_{12}b_{21};\ p_{20} = b_{78}b_{87}$$

$$\Delta = \sqrt{(p_{10} - p_{20})^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}} \qquad (32)$$

Таким образом, в данной статье приведена матричная формулировка задач отражения – преломления термоупругих волн на границах раздела различных сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Тлеукенов, С.К., Ильясов, М.Н., Досумбеков, К.Р.** О матричной формулировке задачи отражения и преломления термоупругих волн // Материалы международной научной конференции «Вторые Ержановские чтения», г. Актобе, 2007 г.

2 **Тлеукенов, С.К., Досумбеков, К.Р., Сейтханова, А.К.** О коэффициентах отражения и преломления упругих и термоупругих волн // Материалы международной научной конференции «Вторые Ержановские чтения», г. Актобе, 2007 г.

3 **Сейтханова, А.К.** О задаче отражения – преломления упругой волны на границе термоупругого полупространства // Вестник ПГУ. Серия Физико-математическая, № 4, Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2010 г.

4. **Тлеукенов, С.К.** Метод матриканта. – Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. – 148 с.

Павлодарский государственный университет
имени С. Торайгырова, Павлодар.
Материал поступил в редакцию 05.06.13.

Н. А. Испулов, А. К. Сейтханова

Термосерпімді толқындардың шағылу-сыну есептердің матрицалық формулировкасы

С. Торайғыров атындағы Павлодар
мемлекеттік университеті, Павлодар к.
Материал 05.06.13 редакцияға түсті.

N. A. Ispulov, A. K. Seitkhanova

The matrix formulation of problems of reflection-refraction of thermoelastic waves

Pavlodar State University named after S. Toraigyrov, Pavlodar.
Material received on 05.06.13.

Термомеханикалық эффектімен болатын серпімді орталарда толқындық процестердің заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептерді шешуінде қажеттілігімен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулері мен жылуөткізгіштік теңдеулері физика–механикалық параметрлердің күрделігі мен көп болуымен ерекшеленеді. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпімділік деген тарауы қарқынды дамып келеді. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбір физика–механикалық қасиеттерін қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрістер зерттеледі.

Берілген мақалада әртүрлі орталардың шекаралардың бөлімдеріндегі термосерпімді толқындардың шағылу-сыну есептердің матрицалық формулировкасы келтірілген.

The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied.

In this article the matrix formulation of problems of reflection – refraction of thermoelastic waves is given in demarcations of various environments.